Приложение А. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Название	Канонический вид	Условия сходимости в среднеквадратичной норме	Скорость сходимости
Метод Якоби	$D\left(x^{n+1} - x^n\right) + Ax^n = f,$ $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$	МЯ сходится, если выполняется любое из условий: 1) $A = A^* > 0, 2D > A$ 2) $A = A^* > 0, a_{ij} > \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{m} \lvert a_{ij} \rvert$	1) $A = A^* > 0, B = B^* > 0, \exists \rho : 0 < \rho < 1,$ $\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B \Rightarrow \left\lVert v^{n+1} \right\rVert_B \leq \rho \left\lVert v^n \right\rVert_B$ 2) $A = A^* > 0, B = B^* > 0, \exists \gamma_1, \gamma_2 : 0 < \gamma_1 < \gamma_2,$ $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \tau_0, \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$ $\left\lVert v^{n+1} \right\rVert_B \leq \rho \left\lVert v^n \right\rVert_B$ 3) $A = A^* > 0, B = E, \gamma_1 = \min\limits_{1 \leq k \leq m} \lambda_k^A, \gamma_2 = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \lambda_k^A,$ $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi} \Rightarrow \left\lVert v^{n+1} \right\rVert \leq \rho \left\lVert v^n \right\rVert$
Метод Зейделя	$\left(D + R_1\right)\left(x^{n+1} - x^n\right) + Ax^n = f,$ $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$	$A = A^* > 0$	
Метод простой итерации (метод релаксации)	$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f, \tau > 0$	$A^T = A > 0, \gamma = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \lambda_k^A, 0 < \tau < \frac{2}{\gamma}$	
Попеременно-треугольный итерационный метод	$\left(E + \omega R_1\right)\left(E + \omega R_2\right) \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f,$ $\tau_{n+1} > 0, \omega > 0,$ $R_1 = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \frac{a_{mm}}{2} \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{2} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & \frac{a_{22}}{2} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{mm}}{2} \end{pmatrix}$	$A = A^* > 0, \omega > \frac{\tau}{4}$	$A = A^* > 0, \exists \delta, \Delta > 0 : A \geq \delta E, R_2^* R_2 \leq \frac{\Delta}{4} A$ $\gamma_1 = \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta\Delta}}{2\left(\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}\right)}, \gamma_2 = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}, \omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \tau = \frac{2}{\gamma_1 +}$ $\eta = \frac{\delta}{\Delta}, \rho = \frac{1-\sqrt{\eta}}{1+3\sqrt{\eta}}, B = \left(E + \omega R_1\right)\left(E + \omega R_2\right) \Rightarrow$ $\left\lVert v^{n+1} \right\rVert_B \leq \rho \left\lVert v^n \right\rVert_B$

Приложение B. Интерполирование функций

Название метода	Описание метода	Погрешность формулы
Интерполяционный полином Лагранжа	$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x) f(x_k), \omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), c_k(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_k)}\omega'(x_k)$	$f(x)\in C^{n+1}[a,b]\ \forall x^* \in [a,b]: r_n(x^*)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x^*), \xi\in(a,b)$
Интерполяционный полином Ньютона	$N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+\ldots+\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$	Так как интерполяционный полином Ньютона — тот же полином Лагранжа, только записанный в другой форме, его погрешность та же, что и у полинома Лагранжа.
Интерполяционный полином Эрмита	$H_n(x)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{a_k-1} c_{k.i}(x) f^{(i)}(x_k)$, *где* $c_{k.i}(x)$ — полином n-й степени, коэффициенты которого находятся из условия: $H_n^{(i)}(x)=f^{(i)}(x_k), k=\overline{0,n}, i=\overline{1,a_k-1}$	$f(x)-H_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{a_0}(x-x_1)^{a_1}\ldots(x-x_n)^{a_n}$, $a_0+a_1+\ldots+a_n=n+1$

Приложение C. Численное решение нелинейных уравнений и систем уравнений

Название метода	Описание метода	Сходимость метода
Метод простой итерации	$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+f(x_n)=0, \tau>0,$ $x_{n+1}=S(x), S(x)=x-\tau f(x).$	Для сходимости метода необходимо, чтобы $\sup\limits_{x\in U_a(x^*)}\lvert 1-\tau f'(x)\rvert<1$, *т.е.* $0<\tau<\frac{2}{M_1}$, *где* $M_1=\sup\limits_{x\in U_a(x^*)}\lvert f'(x)\rvert.$
Метод Ньютона	$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n=0,1,\ldots$	*Пусть* $\exists M>0: \frac{1}{2}\left\lvert\left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)'\right\rvert\le M\ \forall x\in U_a(x_*), \lvert x_0-x_*\rvert\le\frac{1}{M}.$ *Тогда метод Ньютона сходится и имеет место оценка* $\lvert x_n-x_*\rvert\le\frac{1}{M}\left(M\lvert x_0-x_*\rvert\right)^{2^n}.$
Модифицированный метод Ньютона	$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n=0,1,\ldots$	Сходится быстрее метода простой итерации, но медленнее метода Ньютона.
Метод секущих	$x_{n+1}=x_n-\frac{x^n-x^{n-1}}{f(x^n)-f(x^{n-1})}f(x^n)$	

Приложение D. Разностные схемы решения задач математической физики

Название метода	**Описание метода**	**Погрешность аппроксимации**	**Сходимость численного решения к точному**
Явная разностная схема	$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{y_{i-1}^n-2y_i^n+y_{i+1}^n}{h^2}+f(x_i,t_n),$ $(x_i,t_n)\in\omega_{\tau h},$ $\begin{cases} y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), t_{n+1}\in\overline{\omega}_\tau \\ y_N^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), t_{n+1}\in\overline{\omega}_\tau \end{cases},$ $y_i^0=u_0(x_i), x_i\in\overline{\omega}_h$	$\psi_i^n=\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{h^2}-\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+f_i^n,$ $\psi_i^n=O(\tau+h^2)$	Необходимое и достаточное условие для сходимости и устойчивости: $\frac{\tau}{h^2}=\gamma\le\frac{1}{2}$ Сходится в норме C.
Чисто неявная схема	$\gamma y_{i-1}^{n+1}-(1+2\gamma)y_i^{n+1}+\gamma y_{i+1}^{n+1}=-(y_i^n+f_i^{n+1})$ $i=1,\ldots N-1.$	$\psi_i^n=\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2}-\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+f_i^{n+1},$ $\psi_i^n=O(\tau+h^2)$	Чисто неявная разностная схема абсолютно сходится (имеем абсолютную сходимость первого порядка по τ и второго порядка по h). Сходится в норме C.
Симметричная разностная схема (схема Кранка-Никольсена)	$y_{\bar{x}x,i}^m=\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n-y_{i-1}^n}{h^2}$ $\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{1}{2}\left(y_{\bar{x}x,i}^{n+1}+y_{\bar{x}x,i}^n\right)+f\left(x_i,t_n+\frac{1}{2}\tau\right)$ $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),$ $t_{n+1}\in\overline{\omega}_t, y_0^i=u_0(x_i), x_i\in\overline{\omega}_h$	$\psi_i^n=\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x}x,i}^{n+1}+z_{\bar{x}x,i}^n\right)-\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+f\left(x_i,t_n+\frac{1}{2}\tau\right)$ $\psi_i^n=O(\tau^2+h^2)$	Сходится в норме $\lVert z\rVert_{L^2C}=\left(\sum_{k=1}^{N-1}z_k^2h\right)^{\frac{1}{2}}$ Со вторым порядком по τ и вторым – по h.
Разностная схема с весами	$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma)y_{\bar{x}x,i}^n+\phi_i^n\in\omega_{\tau h}$ $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),$ $t_{n+1}\in\overline{\omega}_t, y_0^i=u_0(x_i), x_i\in\overline{\omega}_h$ $\sigma\in R, 0\le\sigma\le 1$	$\psi_i^n=\sigma u_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma)u_{\bar{x}x,i}^n-\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\phi_i^n$ $\sigma=\sigma_*=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau};\phi_i^n=f_i\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)+\frac{h^2}{12}f_i''\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right);\psi_i=O(\tau^2+h^2)$ $\sigma=0{,}5;\phi_i^n=f_i\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right);\psi_i=O(\tau^2+h^2)$ $\sigma\ne\sigma_*,\sigma\ne 0{,}5;\psi_i=O(\tau+h^2)$	Не изучалась

Приложение Е. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Название метода	Описание метода	Погрешность
Метод Рунге-Кутта	$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2 + \ldots + \sigma_m K_m$ $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = 1$ - *условие аппроксимации* $K_1 = f(t_n, y_n)$ $K_2 = f(t_n + a_2 \tau, y_n + b_{21} \tau K_1)$ $\ldots$ $K_m = f(t_n + a_m \tau, y_n + b_{m1} \tau K_{m\ 1} + b_{m2} \tau K_{m\ 1} + \ldots + b_{m(m\ 1)} \tau K_{m\ 1})$	Двухэтапный метод Рунге-Кутта: $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = (1-\sigma) f(t_n, y_n) +$ $+ \sigma f(t_n + a\tau, y_n + atf(t_n, y_n))$ $\psi_n = O(\tau^2)$, *если* $a\sigma = 0{,}5$, $\lvert z_n \rvert \le M\tau^2, M > 0$ *и не зависит от* τ
Многошаговые разностные методы	$\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{\tau} y_{n-k} = \sum_{k=0}^{m} b_k f_{n-k}$, $a_0 \ne 0, b_m \ne 0, n = m, m+1, \ldots$	Для достижения порядка аппроксимации р должны выполняться следующие условия: $a_0 = -\sum_{k=1}^{m} a_k$ $b_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k$ $\sum_{k=0}^{m} k^{l-1}(a_k k + l b_k) = 0, l = 1,2,\ldots p.$